

- [Tutorial](#)
- [Exercícios](#)

## 7b. Modelos Lineares Múltiplos

Videoaula do curso **Princípios de Planejamento e Análise de Dados**. Os conceitos abordados são os mesmos desse tutorial, desconsidere referências à disciplina.



[Video](#)

Os modelos lineares permitem que sejam incluídas mais do que uma variável preditora, como fizemos até aqui. Nesse tutorial vamos aprender alguns princípios básicos desses modelos mais complexos. Em modelos com mais de uma variável preditora, precisamos tomar a decisão de quais variáveis devemos reter em nosso modelo. É desejável interpretar o modelo mais simples e que contém apenas as variáveis que explicam porções consideráveis da variação na variável resposta.

### Formulas Estatísticas

O argumento `formula` da função `lm` funciona de forma diferente das formulas matemáticas e deve-se ter cuidado com a inclusão de termos ou operações dentro dela.

Alguns aspectos básicos do argumento:

- $y \sim x$  indica: construa o modelo da variável resposta  $y$  como **função estatística linear** de  $x$ ;
- $y \sim x_1 + x_2$  indica: construa o modelo estatístico de  $y$  como **função linear** das variáveis  $x_1$  e  $x_2$  como tendo efeitos aditivos;

Se quisermos utilizar os símbolos matemáticos no sentido matemático usual **dentro** de uma fórmula estatística, temos que utilizar a função `I()` para que a operação seja realizada antes da construção do modelo:

- $y \sim I(x_1^2 * x_2^3)$  indica: modele  $y$  como função estatística **da variável**  $x_1^2 * x_2^3$ ;
- $y \sim I(x_1 / x_2)$  indica: modele  $y$  como função estatística **da variável**  $x_1 / x_2$ ;

$x1/x2;$ 

No caso de utilizarmos **funções matemáticas** específicas a função  $I()$  torna-se desnecessária:

- $\log(y) \sim \log(x)$  indica: modele o  $\log(y)$  com função estatística da variável  $\log(x)$ ;
- $\log(y) \sim \log(x1^2 * x2)$  indica: modele o **log(y)** com função estatística da variável  $\log(x1^2 * x2)$ ;

## Modelos Plausíveis

Quando temos uma hipótese onde há mais de uma variável preditora, precisamos avaliar, antes de iniciar as análises, quais modelos são plausíveis e relacionados a que hipótese alternativa. Os modelos só são construídos a partir dessa avaliação. Vamos usar o exemplo da videoaula para exemplificarmos os procedimentos e conceitos relacionados a esse tutorial.

## Interação entre preditoras

Videoaula do curso **Princípios de Planejamento e Análise de Dados**. Os conceitos abordados são os mesmos desse tutorial, desconsidere referências à disciplina.



[Video](#)

A interação é um elemento muito importante quando temos mais de uma preditora, pois desconsiderá-la pode limitar o entendimento dos processos envolvidos. Um exemplo cotidiano da interação é visto no uso de medicamentos e o alerta da bula sobre interação medicamentosa ou efeitos colaterais para pessoas portadoras de doenças crônicas. Dizemos que um medicamento tem interação com outra substância quando o seu efeito é modificado pela presença de outra substância, como por exemplo a ingestão de álcool junto com muitos medicamentos. Nos modelos, a interação tem uma interpretação similar, a resposta pelo efeito de uma variável preditora se altera com a presença de outra preditora.

### Delineamentos Experimentais

Expressão	Significado
$y \sim x$	Modele y como função estatística de x
$y \sim x_1 + x_2$	inclua as variáveis $x_1$ e $x_2$ como preditoras
$y \sim x_1 + x_2 + x_1:x_2$	inclua também a interação de $x_1$ com $x_2$
$y \sim x_1 * x_2$	mesmo que $y \sim x_1 + x_2 + x_1:x_2$
$y \sim (x_1 + x_2 + x_3)^2$	Adiciona acima + $x_3 + x_1:x_3 + x_2:x_3$
$y \sim (x_1 + x_2 + x_3)^3$	Adiciona acima + $x_1:x_2:x_3$
$y \sim (x_1 + x_2 + x_3)^3 - x_1:x_2$	Retira o termo $x_1:x_2$ da fórmula acima

## Simplificando Modelos

Videoaula do curso **Princípios de Planejamento e Análise de Dados**. Os conceitos abordados são os mesmos desse tutorial, desconsidere referências à disciplina.

Videoaula do curso **Planejamento e Análise de Dados**, os conceitos abordados são os mesmos, desconsidere referências à disciplina.



[Video](#)

Um dos procedimentos de simplificar modelos é partir do modelo cheio e ir simplificando, retirando variáveis preditoras que não ajudam na explicação da variabilidade dos dados. O procedimento consiste em comparar modelos aninhados, dois a dois, retendo o que está mais acoplado aos dados. Caso os modelos não sejam diferentes no seu poder explicativo, retemos o modelo mais simples, apoiados no princípio da parcimônia.

### Princípio da parcimônia (Navalha de Occam)

- número de parâmetros menor possível
- linear é melhor que não-linear
- reter menos pressupostos
- simplificar ao mínimo adequado
- explicações mais simples são preferíveis

## Método do modelo cheio ao mínimo adequado

1. ajuste o modelo máximo (cheio)
2. simplifique o modelo:
  - inspecione os coeficientes (summary)
  - remova termos não significativos
3. ordem de remoção de termos:
  - interação não significativos (maior ordem)
  - termos quadráticos ou não lineares
  - variáveis explicativas não significativas
  - verifique se a ordem da retirada de termos de mesmo nível de complexidade influencia a retirada ou manutenção dos termos finais.

## Tomada de decisão

### A diferença não é significativa:

- retenha o modelo mais simples
- continue simplificando

### A diferença é significativa:

- retenha o modelo complexo
- este é o modelo MINÍMO ADEQUADO

Já utilizamos esse procedimento no tutorial [7a. Regressão Linear Simples](#), quando comparamos o modelo linear com preditora e o modelo sem nenhuma variável preditora.

## Peso de bebês ao nascer

Vamos analisar o dado de peso dos bebês ao nascer e como isso se relaciona às características da mãe. Esses dados pode ser consultados em <https://www.stat.berkeley.edu/users/statlabs/labs.html>.

- baixe o arquivo [babies.csv](#) no seu diretório de trabalho
- Vamos selecionar o modelo mínimo adequado a partir das variáveis:
  - resposta **bwt** : peso do bebê ao nascer em onças(oz)
  - preditoras:
    - gestation: tempo de gestação (dias)
    - age: idade
    - weight: peso da mãe
    - smoke: 0 não fumante; 1 fumante

Para simplificar nosso tutorial vamos usar apenas as preditoras: tempo de gestação, idade da mãe e se ela é fumante ou não.

```
bebes <- read.table("babies.csv", header= TRUE, as.is = TRUE, sep= "\t")
```

```
str(bebes)
mlfull <- lm(bwt ~ gestation + age + smoke
             + gestation:age + gestation:smoke
             + age: smoke + gestation:age:smoke, data = bebes)
summary(mlfull)
```

Call:  
 lm(formula = bwt ~ gestation + age + smoke + gestation:age +  
 gestation:smoke + age:smoke + gestation:age:smoke, data = bebes)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-51.433	-10.647	0.156	9.800	50.994

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	1.843e+02	5.443e+01	3.385	0.000735	***
gestation	-2.262e-01	1.938e-01	-1.167	0.243542	
age	-6.010e+00	1.942e+00	-3.095	0.002014	**
smokeTRUE	-1.830e+02	8.188e+01	-2.235	0.025635	*
gestation:age	2.177e-02	6.926e-03	3.143	0.001716	**
gestation:smokeTRUE	6.192e-01	2.934e-01	2.110	0.035056	*
age:smokeTRUE	3.967e+00	2.956e+00	1.342	0.179915	
gestation:age:smokeTRUE	-1.397e-02	1.061e-02	-1.317	0.187994	

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 16.1 on 1166 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.233, Adjusted R-squared: 0.2284

F-statistic: 50.6 on 7 and 1166 DF, p-value: < 2.2e-16

## Interação Tripla

Vamos simplificar o modelo, retirando a interação `gestation:age:smoke` que aparenta não ser importante.

```
ml01 <- lm(bwt ~ gestation + age + smoke
           + gestation:age + gestation:smoke
           + age: smoke, data = bebes)
anova(ml01, mlfull)
summary(ml01)
```

## Interações Dupla

Continuamos a simplificação, retirando as interações duplas uma a uma para avaliar quais delas devem ser mantidas. Os testes parciais das variáveis no `summary` nos dá uma indicação de quais devem ser mantidas, mas uma boa prática é fazer o processo completo, já que um elemento no

modelo pode mudar a efetividade de outro, principalmente quando compartilham alguma porção de variação explicada.

```
## sem age:smoke
ml02 <- lm(bwt ~ gestation + age + smoke
           + gestation:age + gestation:smoke, data = bebes)
anova(ml01, ml02)
## sem gestation:smoke
ml03 <- lm(bwt ~ gestation + age + smoke
           + gestation:age + age:smoke, data = bebes)
anova(ml01, ml03)
## sem gestation:age
ml04 <- lm(bwt ~ gestation + age + smoke
           + gestation:smoke + age:smoke, data = bebes)
anova(ml01, ml04)
```

A única interação dupla que não parece fazer diferença quando retiramos do modelo é a `age:smoke`, as outras explicam uma porção razoável da variação dos dados. Poderíamos continuar simplificando para garantir que não retemos nenhum termo que não é relevante para explicar o peso do bebê ao nascer. Entretanto, a menos que se tenha um bom motivo <sup>1)</sup>, **não retiramos os termos das variáveis isoladas quando ela está em algum termo de interação.**

## Interpretação do modelo

O `summary` nos fornece as principais informações sobre o modelo mínimo adequado.

```
summary(ml02)
```

Call:

```
lm(formula = bwt ~ gestation + age + smoke + gestation:age +
    gestation:smoke, data = bebes)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-51.978	-10.769	0.108	10.027	50.599

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )	
(Intercept)	135.598062	41.406657	3.275	0.001088	**
gestation	-0.055381	0.147986	-0.374	0.708301	
age	-4.248772	1.458653	-2.913	0.003650	**
smokeTRUE	-75.235972	17.213833	-4.371	1.35e-05	***
gestation:age	0.015584	0.005224	2.983	0.002911	**
gestation:smokeTRUE	0.239947	0.061676	3.890	0.000106	***

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 16.1 on 1168 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.2317, Adjusted R-squared: 0.2284

F-statistic: 70.45 on 5 and 1168 DF, p-value: < 2.2e-16

Uma interpretação importante é com relação a variável smoke. Onde foi parar o nível smokeFALSE? Como é uma variável categórica de dois níveis, smoke foi transformada em variáveis indicadoras e um dos níveis deslocado para o intercepto. O que está representado no intercepto? É a estimativa do modelo para uma mulher que não é fumante com tempo de gestação zero e idade zero. O que não faz sentido biológico nenhum.

O intervalo de confiança dos coeficientes é retornado pela função confint:

```
(coefml02 <- coef(ml02))
confint(ml02)
```

## Interpretação da tabela de Anova em Modelos Múltiplos

A função anova aplicada a um único modelo com múltiplas preditoras, nos fornece a comparação de múltiplos modelos na ordem em que as variáveis foram colocadas na fórmula. Vamos interpretar a tabela de anova do nosso modelo:

```
anova(ml02)
```

### Analysis of Variance Table

Response: bwt

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
gestation	1	65450	65450	252.4963	< 2.2e-16 ***
age	1	939	939	3.6241	0.0571933 .
smoke	1	19024	19024	73.3941	< 2.2e-16 ***
gestation:age	1	1964	1964	7.5776	0.0060012 **
gestation:smoke	1	3923	3923	15.1354	0.0001057 ***
Residuals	1168	302757	259		

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

A segunda linha nos diz que o modelo com gestação ao adicionar age não explica muita variação a mais. Na terceira linha a comparação é entre os modelos  $bwt \sim gestation + age$  com o modelo  $bwt \sim gestation + age + smoke$  a quarta é a comparação deste último com  $bwt \sim gestation + age + smoke + gestation:age$  e assim por diante, sempre comparando o modelo com todos os termos anteriores e o que inclui todos os termos anteriores mais o termo que está na linha da tabela. Portanto, se colocarmos termos em outra ordem, as comparações serão outras.

```
ml02b <- lm(bwt ~ age + smoke + gestation + gestation:smoke
            + gestation:age, data = bebes)
anova(ml02b, ml02)
anova(ml02b)
```

### Analysis of Variance Table

Response: bwt

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
age	1	287	287	1.1068	0.2929867	
smoke	1	23757	23757	91.6509	< 2.2e-16	***
gestation	1	61370	61370	236.7568	< 2.2e-16	***
smoke:gestation	1	3580	3580	13.8130	0.0002115	***
age:gestation	1	2307	2307	8.9001	0.0029108	**
Residuals	1168	302757	259			

---  
 Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Só para entendermos o que está apresentado nessa anova, vamos comparar os modelos:

- 1. `bwt ~ age + smoke + gestation`
- 2. `bwt ~ age + smoke + gestation + smoke:gestation`

```
ml05 <- lm(bwt ~ age + smoke + gestation, data = bebes)
ml06 <- lm(bwt ~ age + smoke + gestation + gestation:smoke, data = bebes)
anova(ml05, ml06)
```

Pode haver pequenas variações nos valores por conta arredondamentos. O importante aqui é que um termo pode ser significativo ou não dependendo da ordem que for colocado, principalmente se há alguma colinearidade entre as variáveis incluídas. Ou seja, o termo que é colocado antes explica a variação que o termo que vem depois poderia explicar também!

## Diagnóstico do modelo

O diagnóstico das premissas do modelo é importante, para mais informações veja o tutorial da disciplina [Princípios de Planejamento e Análise de Dados](#) sobre o assunto. O básico pode ser interpretado nos gráficos que são feitos por padrão se usamos a função `plot` no objeto de modelo:

```
par(mfrow = c(2,2), mar=c(4,4,2,2), cex.lab=1.2,
    cex.axis=1.2, las=1, bty="n")
plot(ml02)
```

Estando tudo certo com nosso modelo podemos passar para outras fases como preparar gráficos e interpretar os resultados.

## Videoaula Síncrona

Aula síncrona gravada pelo Google Meet em 05 de outubro de 2020



Video

1)  
desenhos experimentais aninhados podem incluir a variável aninhada apenas na interação

From:

<http://ecor.ib.usp.br/> - **ecoR**

Permanent link:

[http://ecor.ib.usp.br/doku.php?id=02\\_tutoriais:tutorial7b:start](http://ecor.ib.usp.br/doku.php?id=02_tutoriais:tutorial7b:start)

Last update: **2020/10/05 19:36**

